Exercice 1. La bonne réponse est la quatrième (il s'agit d'une application directe de la définition).

Exercice 2. On remarque que $C_1 = C_2 + C_3$, si C_i est la i-ème colonne de A. De manière équivalente. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est dans le noyau de S pour tous α, β, γ ; la matrice S n'est donc jamais inversible.

Si on ne voit pas ce résultat, en écrivant pour simplicité

$$\begin{cases} a_1 = \cos^2(\alpha) & a_2 = \sin^2(\alpha) \\ b_1 = \cos^2(\beta) & b_2 = \sin^2(\beta) \\ c_1 = \cos^2(\gamma) & c_2 = \sin^2(\gamma) \end{cases}$$

on calcule (en développant sur la 1ère ligne)

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & \cos^2(\alpha) & \sin^2(\alpha) \\ 1 & \cos^2(\beta) & \sin^2(\beta) \\ 1 & \cos^2(\gamma) & \sin^2(\gamma) \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ 0 & c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} = (b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1) \\ &= b_1c_2 - a_2b_1 - a_1c_2 + \cancel{a_1a_2} - b_2c_1 + b_2a_1 + a_2c_1 - \cancel{a_1a_2} \\ &= a_1b_2 - a_2b_1 - (a_1c_2 - a_2c_1) + b_1c_2 - b_2c_1. \end{aligned}$$

Comme $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on obtient

$$\begin{cases} a_2 = 1 - a_1 \\ b_2 = 1 - b_1 \\ c_2 = 1 - c_1 \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient

$$a_1b_2 - a_2b_1 = a_1(1 - b_1) - (1 - a_1)b_1 = a_1 - b_1,$$

ce qui montre que

$$a_1b_2 - a_2b_1 - (a_1c_2 - a_2c_1) + b_1c_2 - b_2c_1 = a_1 - b_1 - (a_1 - c_1) + b_1 - c_1 = 0.$$

Par conséquent, la matrice en question n'est jamais inversible.

Exercice 3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ possède la propriété voulue.

Remarque 1. Une matrice A telle $A^m = 0$ et $A^{m-1} \neq 0$ s'appelle une *matrice nilpotente* d'ordre m. Ces matrices jouent un rôle important dans l'étude de la structure des matrices.

Exercice 4. Rappelons que les opérations élémentaires ont l'effet suivant sur le déterminant :

Type I : Si on échange deux lignes, le déterminant change de signe.

Type II : Si on multiplie une ligne par un scalaire $\lambda \neq 0$, le déterminant est multiplié par λ.

Type III : Si on ajoute à une ligne un multiple scalaire d'une autre, le déterminant ne change pas.

On se souvient d'autre part que pour une matrice triangulaire, le déterminant est égal au produit des coefficients diagonaux. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2-\lambda-\lambda^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 3-2\lambda-\lambda^2 \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda-1)^2(3-2\lambda-\lambda^2)
\end{aligned}$$

Exercice 5. Soit $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, alors

$$A^\top (A^{-1})^\top = (A^{-1}A)^\top = I^\top = I.$$

Ce qui prouve que $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Exercice 6. La bonne réponse est la 1ère réponse.

En effet, le polynôme caractéristique est donné par

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-3)+2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2).$$

Le polynôme caractéristique étant scindé à racines simples, A est diagonalisable. Soit $P \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Si

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

L'équation précédente peut se réécrire $AP = P\mathrm{Diag}(1,2)$, et on obtient le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ -a+3c & -b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix}.$$

Le système se réduit donc aux deux équations

$$\begin{cases} a = 2c \\ b = d \end{cases}$$

On peut donc prendre $a = b = d = 1$, ce qui donne $c = 2$ et

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est un élément de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. En se souvenant (ou en la calculant à nouveau) de la formule

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix},$$

on obtient donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on a

$$A^{10} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2-2^{10} & -2+2^{11} \\ 1-2^{10} & -1+2^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1022 & 2046 \\ -1023 & 2047 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.
1) Soit $w_0 \in V$ non nul. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on définit le vecteur $w_k = f^k(w_0)$. Si l'affirmation (a) n'était pas vérifiée, alors la famille $E = \{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ serait une famille libre infinie, contredisant l'hypothèse que V est de dimension finie.

Détaillons l'argument : Notons $E_k = \{w_0, \dots, w_k\} \subset V$. Nous affirmons que si $\dim(V) = n < \infty$, alors, la famille E_n est liée. Pour voir cela, distinguons deux cas :

1. Soit tous les éléments de cette famille sont différents. Ainsi
$$\mathrm{Card}(E_n) = n + 1 > \dim(V),$$
donc la famille E_n est liée.
2. Soit il existe des entiers $k < k' \leqslant n$ tels que $w_k = w_{k'}$, donc les vecteurs $w_0, \dots, w_n$ sont linéairement dépendants (c'est-à-dire la famille E_n est liée).

On a montré que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid E_k \text{ est liée}\}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$, il admet donc un plus petit élément, que l'on note m. Comme $E_0 = \{w_0\}$ est libre, on a $m \geqslant 1$. Par minimalité de m, la famille E_{m-1} est libre. Comme E_m est liée, on en déduit que w_m est combinaison linéaire de $w_0, \dots, w_{m-1}$.

2) On montre que $f(W) \subset W$. Comme E_{m-1} engendre W, il suffit de montrer que $f(w_k) \in W$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant m-1$. Le résultat est clair si $k < m-1$; pour $k = m-1$, ceci est une conséquence du fait que $f(w_{m-1}) = w_m$ est combinaison linéaire de $w_0, \dots, w_{m-1}$.

3) On a observé au point (a) que $E_{m-1} = \{w_0, \dots, w_{m-1}\}$ est libre. Comme $W = \mathrm{Vec}(E_{m-1})$, on déduit que E_{m-1} est bien une base de W.

4) Soit B la base *ordonnée* $(w_0, \dots, w_{m-1})$, obtenue à partir de E_{m-1}. Par le point précédent, on peut considérer l'endormorphisme :
$$f|_W \colon W \to W.$$
On cherche sa matrice $A = M_{B,B}(f|_W)$ dans la base B. Chaque colonne de A est donnée par l'image du vecteur de base correspondant, exprimé dans la base B. Pour $0 \leqslant k < m-1$ on a $f(w_k) = w_{k+1}$ et pour $k = m-1$ on a
$$f(w_{m-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i w_i.$$
Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
f(w_0) &= 0\cdot w_0 + 1\cdot w_1 + 0\cdot w_2 + \cdots + 0\cdot w_{m-1}\\
f(w_1) &= 0\cdot w_0 + 0\cdot w_1 + 1\cdot w_2 + \cdots + 0\cdot w_{m-1}\\
&\vdots\\
f(w_{m-2}) &= 0\cdot w_0 + 0\cdot w_1 + 0\cdot w_2 + \cdots + 1\cdot w_{m-1}\\
f(w_{m-1}) &= a_0\cdot w_0 + a_1\cdot w_1 + \cdots + a_{m-1}\cdot w_{m-1}
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$A = M_{B,B}(f|_W) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_2\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & & \ddots & 1 & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. 1) Les matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sont semblables si il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
2) Supposons que $B = P^{-1}AP$, alors $B^2 = P^{-1}A^2P$ car

$$B^2 = (P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A(PP^{-1})AP = P^{-1}A(I_n)AP = P^{-1}A^2P.$$

3) On rappelle que si X et Y sont deux matrices de même taille, alors $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$ (cette propriété est d'ailleurs facile à vérifier par un calcul direct des deux traces). Supposons que $B = P^{-1}AP$, alors

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(APP^{-1}) = \mathrm{Tr}(A).$$

4) A est semblable à I_n si et seulement si $A = I_n$.

5) Voici deux façons de prouver que deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

1. On peut partir de la définition des valeurs propres. $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement si il existe un vecteur non nul $X \in \mathbb{K}^n$ tel que $AX = \lambda X$. Par conséquent si $B = P^{-1}AP$ nous avons
$$BP^{-1}X = P^{-1}APP^{-1}X = P^{-1}AX = \lambda P^{-1}X.$$
2. En utilisant le polynôme caractéristique. On a vu au cours que les valeurs propres de A sont exactement les racines de $\chi_A(t)$, et on a aussi vu que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique (Proposition 8.5.3 du polycopié 1).

6) L'argument ci-dessus montre que si X est vecteur propre de A, alors $Y = P^{-1}X$ est vecteur propre de $B = P^{-1}AP$. Donc en général les deux matrices n'ont pas les mêmes vecteurs propres.

Exercice 9. La structure d'espace vectoriel sur $V \times W$ est la structure de produit direct, qui est définie par

— Si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V \times W$, alors $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
— Si $(x, y) \in V \times W$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

Supposons d'abord que f est une application linéaire, on doit alors prouver que $\Gamma \subset V \times W$ est un sous-espace vectoriel. On vérifie les trois affirmations habituelles :

1. $\Gamma \neq \emptyset$.

   En effet, on a $f(0_V) = 0_W$, donc l'élément $(0_V, 0_W)$ appartient à Γ (c'est le 0 de l'espace vectoriel $V \times W$.)
2. Si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Gamma$, alors $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in \Gamma$.

   En effet $(x_i, y_i) \in \Gamma$ signifie que $y_i = f(x_i)$, donc
$$(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2, f(x_1)+f(x_2)) = (x_1+x_2, f(x_1+x_2)) \in \Gamma$$
3. Si $(x, y) \in \Gamma$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda \cdot (x, y) \in \Gamma$, car on a les implications
$$(x, y) \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad y = f(x) \quad \Rightarrow \quad \lambda y = f(\lambda x) \quad \Rightarrow \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \in \Gamma$$

Pour prouver la réciproque, on suppose que Γ est un sous-espace vectoriel de $V \times W$ et on doit en déduire que f est une application linéaire : On a pour tout $x_1, x_2 \in V$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$
$$\lambda_1(x_1, f(x_1)) + \lambda_2(x_2, f(x_2)) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)) \in \Gamma$$

car Γ est un sous-espace vectoriel de $V \times W$; ce que implique que

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

par définition de Γ.

Exercice 10. Suivons la suggestion. On suppose donc que $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$ et on veut montrer que $\mathrm{Ker}(f^3) = \mathrm{Ker}(f)$.

Il est clair que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^3)$, car si $f(x) = 0$, alors $f^3(x) = f^2(f(x)) = f^2(0) = 0$.

Pour montrer l'inclusion inverse, on suppose que $x \in \mathrm{Ker}(f^3)$. Alors $f^2(f(x)) = f^3(x) = 0$, ce qui signifie que $f(x) \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Mais on suppose que $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$, donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.

Or cela signifie que $f^2(x) = f(f(x)) = 0$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$. La conclusion est que si $x \in \mathrm{Ker}(f^3)$, alors $x \in \mathrm{Ker}(f)$, ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(f^3) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

La preuve générale est virtuellement identique. Supposons que $\mathrm{Ker}(f^{m+1}) = \mathrm{Ker}(f^m)$ et soit $x \in \mathrm{Ker}(f^{m+2})$ arbitraire. Alors $f^{m+2}(x) = f^{m+1}(f(x)) = 0$. Donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f^{m+1}) = \mathrm{Ker}(f^m)$, par conséquent $f^{m+1}(x) = f^m(f(x)) = 0$. Cela montre que $x \in \mathrm{Ker}(f^{m+1}) = \mathrm{Ker}(f^m)$. L'argument montre ainsi que $\mathrm{Ker}(f^{m+2}) \subset \mathrm{Ker}(f^m)$. L'inclusion inverse $\mathrm{Ker}(f^m) \subset \mathrm{Ker}(f^{m+2})$ est évidente.

Le même argument montre que $\mathrm{Ker}(f^{m+3}) = \mathrm{Ker}(f^{m+1}) = \mathrm{Ker}(f^m)$ et par récurrence $\mathrm{Ker}(f^{m+k}) = \mathrm{Ker}(f^m)$ pour tout $k \geq 1$.